ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère des Universités

1, Rue Bougainville — 75007 PARIS

Tél. : 551 32-59

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE 1981

MATHEMATIQUES 2ÈME EPREUVE

DURÉE 2 H - COEFFICIENT 2

Exercice 1

1°) On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer ses valeurs propres. Diagonaliser A, c'est à dire trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

2°) Calculer les coefficients de A^n en fonction de n.

3°) On considère les trois suites réelles (U_n), (V_n), (W_n) définies par leurs premiers termes : U_0, V_0, W_0 et les relations suivantes :

$$U_n = -4U_{n-1} - 6V_{n-1}$$

$$V_n = 3U_{n-1} + 5V_{n-1}$$

$$W_n = 3U_{n-1} + 6V_{n-1} + 5W_{n-1}$$

Calculer U_n, V_n, W_n en fonction de n et de U_0, V_0, W_0.

Exercice 2

Soit E une algèbre sur un corps commutatif K. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E (considérée comme espace vectoriel sur K). Un endomorphisme D de E est appelé une dérivation dans E s'il vérifie la condition suivante :

$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

On désigne par $\mathcal{D}(E)$ l'ensemble des dérivations de E.

Pour tout endomorphisme f de E on pose $f^0 = Id\ E$ et pour tout entier naturel $n > 0$, $f^n = f^{n-1} \circ f$

1°) Soit e l'élément neutre de E. Montrer que l'application φ de K dans E définie par $\varphi(\alpha) = \alpha e$ pour tout $\alpha \in K$ est un homomorphisme d'anneaux injectif. Dans la suite du problème on identifiera K et $\varphi(K)$ au moyen de φ.

2°) Soit D une dérivation de E. Calculer D(e) et $D(\alpha)$ pour $\alpha \in K$.

3°) Montrer que si $a \in E$, l'application D_a de E dans E définie par $D_a(x) = ax - xa$ pour tout élément x de E est une dérivation.

4°) Montrer que $\mathcal{D}(E)$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

5°) Montrer qu'en général, $\mathcal{D}(E)$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

6°) Montrer que si D_1 et D_2 sont des éléments de $\mathcal{D}(E)$, il en est de même de $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

Exercice 3

A) On donne un nombre réel, q, compris entre 0 et 1. On pose, n étant un entier positif.

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} q^i \quad , \quad B_n = \sum_{i=1}^{n} i q^{i-1} \quad , \quad C_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 q^{i-1}$$

1°) Calculer, en fonction de q et n, les expressions de A_n, B_n et C_n.

2°) Montrer, en utilisant la théorie du logarithme népérien, que les quantités q^n et $n^\alpha q^n$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (α réel positif arbitraire).

3°) Déduire des calculs précédents, les limites de A_n, B_n et C_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

B) On lance un dé parfaitement symétrique jusqu'à obtenir l'as et l'on appelle P(i) la probabilité de production de l'as au bout de i coups.

1°) Calculer P(i) et vérifier que $\sum_{i=1}^{\infty} P(i) = 1$

2°) Calculer l'espérance mathématique, $\overline{i}$, de i.

3°) Calculer l'écart type, σ_i

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail